ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*. Classe di Scienze — Vol. LXXXII — 1949.

SULLA CARATTERIZZAZIONE DELLE IPERSUPERFICIE DI DIRAMAZIONE DEGLI S_n TRIPLI

Nota del dott. Carlo Felice Manara

ULRICO HOEPLI
Libraio dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1949

SULLA CARATTERIZZAZIONE DELLE IPERSUPERFICIE DI DIRAMAZIONE DEGLI S_n TRIPLI

Nota del dott. CARLO FELICE MANARA

(Adunanza del 3 febbraio 1949)

Sunto. — Si caratterizza una classe di ipersuperficie di diramazione degli S_n tripli dimostrando la possibilità di estendere con procedimento ricorrente i risultati relativi alle curve di diramazione dei piani tripli.

§ 1. — Scopo della presente Nota è la caratterizzazione di una classe di ipersuperficie di diramazione degli iperspazii tripli; sulla base di noti risultati [1] ottenuti per le curve di diramazione dei piani tripli vengono qui risolti i problemi fondamentali

A) assegnare condizioni, proiettive e funzionali, che siano sufficienti affinchè una data ipersuperficie Φ sia di diramazione per un S_n triplo,

B) posto che una data ipersuperficie soddisfi alle condizioni accennate, determinare gli S_n tripli, birazionalmente distinti, che si possono costruire a partire da essa.

La risoluzione di questi problemi sarà qui data esplicitamente per $n = 3$, ossia per le superficie di diramazione dell'S_3; sul modello di questa si ottiene facilmente la risoluzione per n qualunque, maggiore di 3, con procedimento ricorrente. Come si vedrà, la validità di un tale procedimento è sostanzialmente assicurata dalla unicità birazionale di un S_n triplo (per $n > 1$) di cui sia assegnata la varietà di diramazione, che soddisfi alle condizioni nostre.

§ 2. — Sia dunque una superficie algebrica Φ_m, generica nel sistema continuo di superficie di ordine m, possedenti sol-

[1] Cfr. O. CHISINI e C. F. MANARA - *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*. Boll. U. M. I. 1948.

tanto una curva doppia cuspidale Q di ordine k; diciamo R una sezione piana generica di Φ_m; il problema A è risolto nel nostro caso dal seguente

TEOREMA A. — La superficie algebrica Φ_m è di diramazione per uno spazio triplo se gode delle seguenti proprietà:

1) tra l'ordine k della linea cuspidale e l'ordine m di Φ_m sussiste la relazione

$$3\,m^2 - 16\,k = 12\,h^2 \tag{1}$$

(dove h e un intero non negativo)

2) la curva cuspidale Q è contenuta nella serie completa di curve equivalenti a quelle secate su Φ_m dalle superficie di ordine $(m - 2\,h)/4$, ossia esiste una curva T tale che

$$Q + T \equiv \frac{m - 2\,h}{4} \cdot R \tag{2}$$

3) esiste una curva T′ non contenente, nemmeno parzialmente, la T ed equivalente a T + h R.

Per la dimostrazione consideriamo un fascio generico di piani Σ; detto π un piano generico del fascio, sia φ la curva sezione di Φ con π. Per noti risultati [1], nelle ipotesi poste per la superficie Φ, su π esiste un piano triplo di cui φ è curva di diramazione, cioè esiste una funzione algebrica w a tre valori, definita per ogni punto di π e diramata da φ.

Ora tutte le possibili funzioni w cosiffatte sono birazionalmente identiche e sarà quindi possibile imporre delle condizioni algebriche, dipendenti razionalmente dal parametro che definisce π nel fascio Σ, in modo che risulti di conseguenza definito su π un numero finito di esse. Quindi una generica funzione simmetrica di queste funzioni sarà atta a definire razionalmente una funzione a tre valori su π diramata da φ [2], il che basta perchè sia definita una funzione a tre valori in tutto lo spazio.

§ 3. — Acquisita così l'esistenza di uno spazio triplo diramato dalla superficie Φ soddisfacente alle ipotesi del teorema A rimane a risolversi il problema B; ad esso risponde il seguente

---

[2] Una funzione simmetrica cosiffatta si può certamente costruire con una funzione razionale generica dei coefficienti di un fattore irriducibile della risolvente di Galois dell'equazione algebrica avente come radici le funzioni $W_1\, W_2 \ldots W_n$ che risultano dalle condizioni imposte.

TEOREMA B. — In relazione ad una superficie Φ soddisfacente alle ipotesi del teorema A esiste un solo spazio triplo che la ammette come superficie di diramazione.

Questo teorema, che può considerarsi come una estensione dell'analogo teorema del Chisini sull'identità birazionale di due funzioni algebriche possedenti una medesima curva di diramazione ([3]), si trova pure già dimostato dallo stesso A. in relazione ad ipersuperficie di diramazione di iperspazii di dimensione qualunque ([4]).

Sono quindi garantite le due basi, esistenza ed unicità birazionale che permettono l'inizio di un procedimento ricorrente il quale estenda ad n qualunque i teoremi qui dimostrati ed enunciati per semplicità per $n = 3$.

([3]) Cfr. O. CHISINI - *Sulla identità birazionale di due funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione.* Rend. Istit. Lomb. Vol. 77, Fasc. 2°, 1943-44.

([4]) In una nota presentata all'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e non ancora comparsa pubblicamente

Estratto dai *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere
Vol. LXXXI, 12° della Serie III, Fasc. I.

Pavia — Premiata Tipografia Successori Fusi — 1949

Premiata Tipografia Successori FUSI — Pavia, Via L. Spallanzani, 11 - 1949